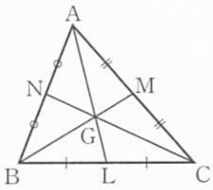
数学A

目 次

第1講　図形の性質(1)　三角形の性質

基　礎　学　習

1　三角形の重心



右図の△ABCで，3本の中線AL，BM，❶　　は1点Gで交わり，この点Gを三角形の❷　　という。

この点Gは，中線ALを❸　　：1に内分する。

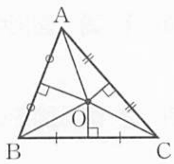
すなわち

AG：GL＝❸　　：1

また，同様に，中線BM，❶　　を❸　　：1に内分する。

このように，三角形の3本の中線は1点で交わり，この交点は各中線を2：1に内分する。

2　三角形の外心

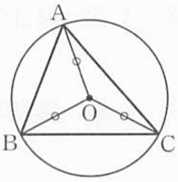


右図の△ABCで，3辺BC，CA，ABの垂直二等分線は，1点Oで交わる。

点Oは辺BCの垂直二等分線上にあるから

OB＝❹

同様に，OC＝OA，OA＝❺　　であるから，点Oは3頂点A，B，Cから等距離にある。



よって，点Oを中心として，3頂点A，B，Cを通る円をかくことができる。この3頂点を通る円を，三角形の❻　　といい，その中心Oを❼　　という。

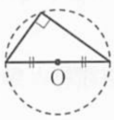
このように，三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わり，この交点が三角形の❼　　である。

三角形の❼　　は，三角形の形状によって次のような位置にある。

(i)　鋭角三角形

内部

(ii)　直角三角形



斜辺の中点

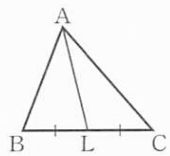
(iii)　鈍角三角形

外部

point

中線

三角形の1つの頂点とそれに向かい合う辺の中点とを結ぶ線分。



↔ 内分と外分

m，n を正の実数とする。

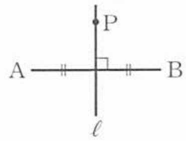
点Pが線分AB上にあって，AP：PB＝m：n が成り立つとき，点Pは線分ABを m：n に内分するという。

点Qが線分ABの延長上にあって，AQ：QB＝m：n が成り立つとき，点Qは線分ABを m：n に外分するという。

point

垂直二等分線

1つの線分の中点を通り，これに垂直な直線。



垂直二等分線 ℓ 上の点Pについて

PA＝PB

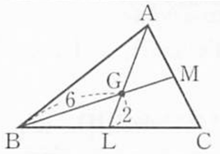
が成り立つ。

解答　❶ CN　❷ 重心　❸ 2　❹ OC　❺ OB　❻ 外接円　❼ 外心

例題 1　［三角形の重心］　➡1

右図で，点Gは△ABCの重心である。GL=2，BG=6 のとき，次の長さを求めよ。

(1)　AG　　　　(2)　BM



解答

(1)　点Gは△ABCの重心であるから，AG：GL=［①］：［②］ より

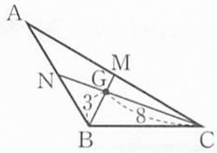
AG：2=［①］：［②］　　よって，AG=［③］

(2)　また，BG：BM=2：［④］ より

6：BM=2：［④］　　よって，BM=［⑤］

類題 1　右図で，点Gは△ABCの重心である。BG=3，CG=8 のとき，次の長さを求めよ。

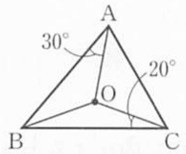
(1)　GM　　　　(2)　CN



例題 2　［三角形の外心］　➡2

右図で，点Oは△ABCの外心である。∠OAB=30°，∠OCB=20°のとき，次の角の大きさを求めよ。

(1)　∠ABC　　　　(2)　∠OAC



解答

(1)　点Oは△ABCの外心であるから，OA=OB=［⑥］ より，△OAB，△OBCは二等辺三角形である。

△OABにおいて，2つの底角は等しいから

∠OBA=∠OAB=［⑦］°

△OBCにおいて，同様に

∠OBC=∠OCB=［⑧］°

よって，∠ABC=∠OBA+∠OBC=［⑨］°

(2)　OA=OC より，△OCAは二等辺三角形であるから

∠OCA=∠［⑩］

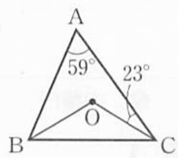
△ABCの内角の和は180°であるから

30°×2+［⑪］°×2+2∠OAC=180°

よって，∠OAC=［⑫］°

類題 2　右図で，点Oは△ABCの外心である。∠BAC=59°，∠OCA=23°のとき，次の角の大きさを求めよ。

(1)　∠OBA　　　　(2)　∠OCB



ヒント

↔ BG：GM=2：1

例題 1 の答

① 2　② 1　③ 4
④ 3　⑤ 9

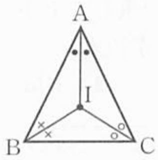
↔ **外心の性質**

外心Oは，辺AB，BC，CAの垂直二等分線の交点であるから，3頂点A，B，Cから等距離にある。

例題 2 の答

⑥ OC　⑦ 30
⑧ 20　⑨ 50
⑩ OAC　⑪ 20
⑫ 40

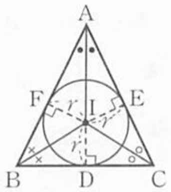
3 三角形の内心



右図の△ABCで，３つの内角∠A，∠B，∠Cの二等分線は１点Ｉで交わる。

点Ｉから３辺BC，CA，ABに垂線ID，IE，IFを下ろすと，△CID≡△❶　　より，ID＝❷　　

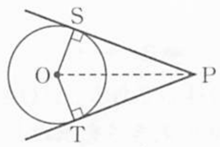
同様に，ID＝IFであり，ID＝❷　　＝IF



よって，点Ｉを中心として，３点D，E，Fを通る円をかくことができる。この円は，△ABCの３辺に点D，E，Fで接している。この円を，三角形の❸　　といい，その中心Ｉを❹　　という。

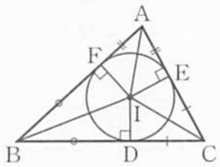
このように，三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わり，この交点が三角形の❹　　である。

4 接線の長さと内接円



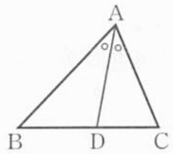
円Ｏの外部にある点Ｐから，円Ｏに接線PS，PTをひくと，△POS≡△POTより，PS＝❺　　となる。このPS，❺　　の長さをＰからの接線の長さという。

←→ △POSと△POTで
OS＝OT（＝半径）
∠PSO＝∠PTO＝90°
POは共通
ゆえに，△POS≡△POT



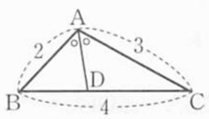
右図のように，円が△ABCに内接するとき，AF＝AE，BD＝❻　　，CE＝❼　　である。

5 角の二等分線と比



(1)　△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をＤとすると，BD：DC＝AB：ACが成り立つ。

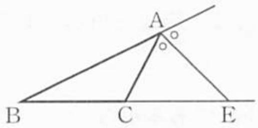
例　AB＝2，BC＝4，CA＝3 の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をＤとすると



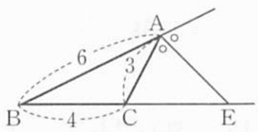
BD：DC＝2：❽　　より，BD＝❾　　

←→ $BD=\frac{2}{2+3}\cdot BC$

(2)　AB≠ACである△ABCの頂点Ａにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点をＥとすると，BE：EC＝AB：ACが成り立つ。



例　AB＝6，BC＝4，CA＝3 の△ABCで，頂点Ａの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をＥとすると



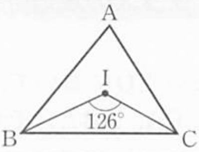
BE：EC＝❿　　：1 より，EC＝⓫　　

←→ BC：CE＝1：1

解答　❶ CIE　❷ IE　❸ 内接円　❹ 内心　❺ PT　❻ BF　❼ CD　❽ 3　❾ $\frac{8}{5}$　❿ 2　⓫ 4

例題3　［三角形の内心］　➡3

右図で，点Ｉは△ABCの内心である。
∠BIC＝126°のとき，∠BACの大きさを求めよ。



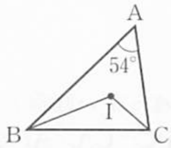
解答

△BICで，∠IBC＋∠ICB＝180°－$\boxed{1}$°＝$\boxed{2}$°

△ABCで，∠BAC＝180°－2(∠IBC＋∠$\boxed{3}$)

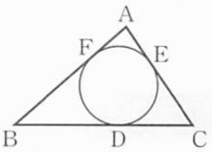
＝180°－2×$\boxed{2}$°＝$\boxed{4}$°

類題3　右図で，点Ｉは△ABCの内心である。
∠BAC＝54°のとき，∠BICの大きさを求めよ。



例題4　［接線の長さと内接円］　➡4

AB＝5，AC＝4の△ABCに内接する円が3辺BC，CA，ABと接する点をD，E，Fとする。
AF＝xとおくとき，次の問いに答えよ。
(1)　線分BD，CDの長さをxで表せ。
(2)　BC＝6のとき，線分AFの長さを求めよ。



解答

(1)　接線の性質より，BD＝$\boxed{5}$＝AB－$\boxed{6}$＝5－$\boxed{7}$

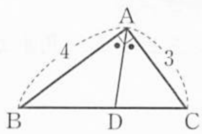
AE＝AFより，同様に，CD＝$\boxed{8}$＝AC－$\boxed{9}$＝4－$\boxed{10}$

(2)　(1)より，BC＝BD＋DC＝9－$\boxed{11}$＝6　　よって，AF＝x＝$\boxed{12}$

類題4　AB＝6，AC＝5の△ABCに内接する円が3辺BC，CA，ABと接する点をD，E，Fとする。AF＝2のとき，BCの長さを求めよ。

例題5　［角の二等分線と比］　➡5

AB＝4，AC＝3，∠BAC＝90°の△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとするとき，線分CDの長さを求めよ。



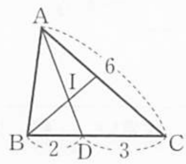
解答

三平方の定理により，BC＝$\sqrt{4^2+\boxed{13}}$＝$\boxed{14}$

線分ADは∠Aの二等分線であるから，BD：DC＝$\boxed{15}$：3

よって，CD＝$\dfrac{\boxed{16}}{\boxed{15}+3}$BC＝$\boxed{17}$×$\boxed{14}$＝$\boxed{18}$

類題5　右図の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，△ABCの内心をＩとするとき，辺ABの長さと，AI：IDを求めよ。



ヒント

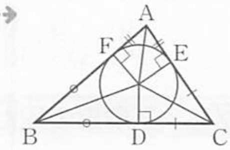
↔ 三角形の内角の和は180°

↔ ∠ABC＋∠ACB
＝2∠IBC＋2∠ICB

例題3の答

1　126	2　54
3　ICB	4　72

↔



BD＝BF
CD＝CE
AE＝AF
が成り立つ。

例題4の答

5　BF	6　AF
7　x	8　CE
9　AE（AFでも可）	
10　x　11　$2x$	12　$\dfrac{3}{2}$

↔ 内角の二等分線の性質より
BD：DC＝AB：AC

例題5の答

13　3^2	14　5	15　4
16　3	17　$\dfrac{3}{7}$	18　$\dfrac{15}{7}$

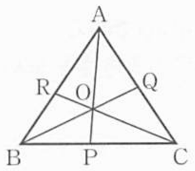
6 チェバの定理・メネラウスの定理

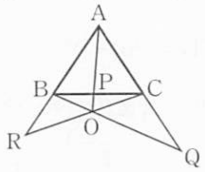
(1)　チェバの定理

△ABCとその辺上にない点Oにおいて，直線AO，BO，COが，辺BC，CA，ABと，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\boxed{❶\quad}$$

このチェバの定理は，右図のように，点Oが△ABCの外部にある場合にも成り立つ。



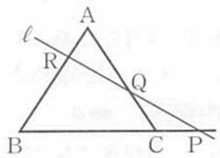


↔ **チェバの定理の公式**
BP，PC，CQ，QA，AR，RBとしりとりするように左から書いていくと公式ができあがる。

(2)　メネラウスの定理

△ABCとその頂点を通らない直線ℓにおいて，直線ℓが△ABCの3辺BC，CA，ABまたはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\boxed{❷\quad}$$



↔ チェバの定理の公式と式の形は同じである。

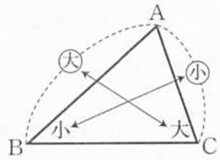
7 三角形の辺と角の大小

△ABCにおいて，AB>AC ⟺ ∠C>∠B

すなわち

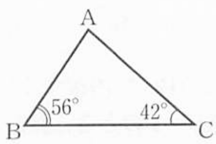
(1)　大きい辺に対する角は，小さい辺に対する角よりも$\boxed{❸\quad}$。

(2)　大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺よりも$\boxed{❹\quad}$。



例　右図で，∠B=56°，∠C=42°のとき

AB$\boxed{❺\quad}$ACが成り立つ。



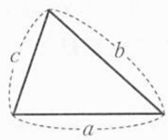
↔ ∠B>∠Cより，ACとABの大小関係を考える。

8 三角形の成立条件

正の数a，b，cを3辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} a<b+c \\ b<c+a \quad \cdots\cdots① \\ c<a+b \end{cases}$$

である。すなわち，三角形の2辺の長さの和は，残りの1辺の長さより$\boxed{❻\quad}$。



例　長さx，4，7の3つの線分を3辺とする三角形が存在するxの範囲は

$\boxed{❼\quad}<4+7$，$\boxed{❽\quad}<4+x$

より，$\boxed{❾\quad}<x<\boxed{❿\quad}$である。

↔ ①の3つの式を1つの式にまとめると

$$|a-b|<c<a+b$$

また，a，b，cの中でaが最大であれば，三角形が存在するための条件は，$a<b+c$である。

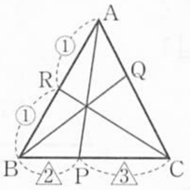
↔ $4<7$と$x>0$より
$4<x+7$
は成り立つので除いた。

解答　❶ 1　❷ 1　❸ 大きい　❹ 大きい　❺ <　❻ 大きい　❼ x　❽ 7　❾ 3　❿ 11

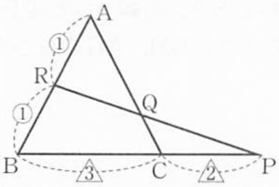
例題6　［チェバの定理･メネラウスの定理］　➡6

次の図で，AQ：QC を求めよ。

(1)



(2)



解答

(1)　チェバの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　　$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

よって，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{3}{2}$ より，AQ：QC＝$\boxed{1}$：$\boxed{2}$

(2)　メネラウスの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　　$\dfrac{3+2}{2}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

よって，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{5}$ より，AQ：QC＝$\boxed{3}$：$\boxed{4}$

ヒント

↔ チェバの定理，メネラウスの定理の公式に，与えられた値を代入する。

類題6　**例題6** と同じ点の配置で，次の比の関係が成り立つとき，AQ：QC を求めよ。

(1)　AR：RB＝3：2，BP：PC＝8：9

(2)　AR：RB＝3：5，BC：CP＝3：1

例題6の答

1　2　2　3　3　5
4　2

例題7　［三角形の辺と角の大小］　➡7

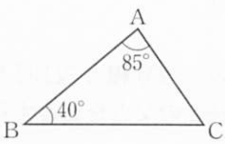
△ABC において，∠A＝85°，∠B＝40° のとき，3 辺 BC，CA，AB の大小関係を不等号を用いて表せ。

解答

$\angle C=180^\circ-(85^\circ+\boxed{5}^\circ)=\boxed{6}^\circ$

よって，∠$\boxed{7}$＜∠$\boxed{8}$＜∠A より

$\boxed{9}$＜$\boxed{10}$＜BC



類題7　△ABC において，BC＝6，CA＝$5\sqrt{2}$，AB＝3 のとき，3 つの内角の大小関係を不等号を用いて表せ。

例題7の答

5　40　6　55　7　B
8　C　9　CA
10　AB

例題8　［三角形の成立条件］　➡8

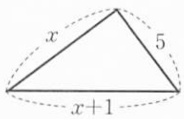
長さ x，$x+1$，5 の 3 つの線分を 3 辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。

解答

辺の長さは正であるから，$x>0$，$x+1>0$ より，$x>0$ である。

三角形の成立条件より，$\boxed{11}<x+\boxed{12}$

よって，求める x の範囲は，$x>\boxed{13}$



↔ 三角形の成立条件の残り 2 つの不等式

$x<(x+1)+5$

$x+1<x+5$

は，つねに成り立つ。

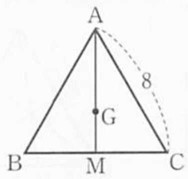
類題8　長さ x，$2x+1$，7 の 3 つの線分を 3 辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。

例題8の答

11　5　12　$x+1$　13　2

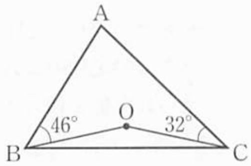
確　認　問　題

1　右図で，点Gは正三角形ABCの重心であり，直線AGと辺BCとの交点をMとする。正三角形ABCの1辺の長さが8であるとき，BM，AGの長さを求めよ。↔ 例題1

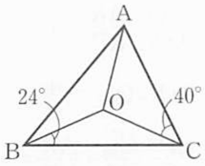


2　次の図で，点Oは△ABCの外心である。次の角の大きさを求めよ。↔ 例題2

(1)　∠BAC

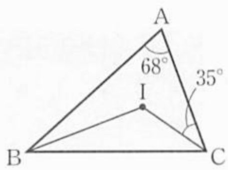


(2)　∠OAB

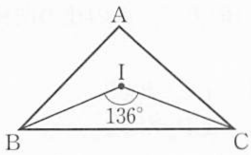


3　次の図で，点Iは△ABCの内心である。次の角の大きさを求めよ。↔ 例題3

(1)　∠IBA



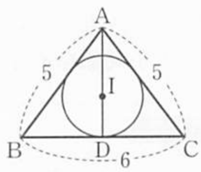
(2)　∠BAC



4　右図のように，3辺の長さが5，5，6の二等辺三角形ABCに円が内接している。点Iは二等辺三角形ABCの内心であり，直線AIと辺BCとの交点をDとする。内接円の半径をrとおくとき，次の問いに答えよ。↔ 例題4

(1)　線分AIの長さを，rを用いて2通りの表し方で表せ。

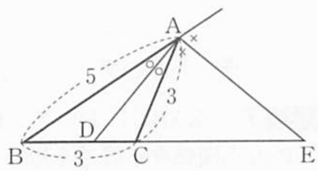
(2)　内接円の半径rを求めよ。



5　右図の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，頂点Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとするとき，次の問いに答えよ。↔ 例題5

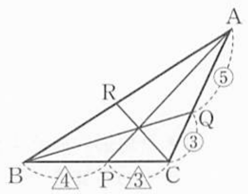
(1)　DCの長さを求めよ。

(2)　ECの長さを求めよ。

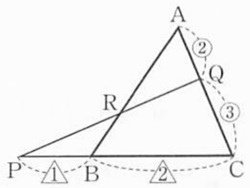


6　次の図で，AR：RBを求めよ。↔ 例題6

(1)



(2)



7　△ABCにおいて，∠A＝38°，∠B＝72°のとき，3辺AB，BC，CAの大小関係を不等号を用いて表せ。↔ 例題7

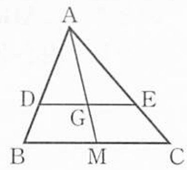
8　長さ$2x$，$x+3$，6の3つの線分を3辺とする三角形が存在するxの範囲を求めよ。↔ 例題8

基　本　問　題

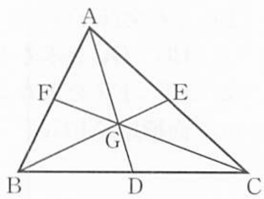
1　右図で，点Gは△ABCの重心である。直線AGと辺BCとの交点をM，Gを通り辺BCに平行な直線と2辺AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　AE：ECを求めよ。

(2)　BC=12のとき，GEの長さを求めよ。



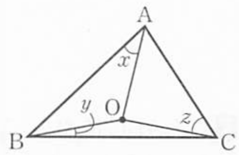
2　右図で，点Gは△ABCの重心であり，3辺BC，CA，ABの中点をそれぞれD，E，Fとするとき，△DEFの重心もGであることを示せ。



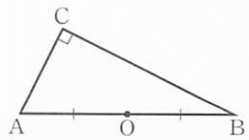
3　右図で，点Oは△ABCの外心である。

　　∠OAB=x，∠OBC=y，∠OCA=z

とするとき，$x+y+z$の値を求めよ。



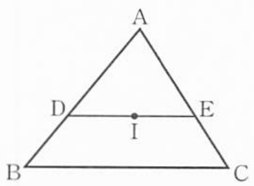
4　∠C=90°の直角三角形ABCにおいて，辺ABの中点をOとするとき，Oが△ABCの外心であることを示せ。



5　△ABCの内心Iを通り辺BCに平行な直線と2辺AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとするとき

　　DE=BD+CE

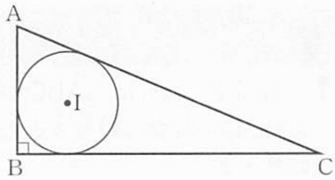
であることを示せ。



6 $\angle ABC=90^\circ$の直角三角形ABCにおいて

　$AB=5$，$BC=12$

のとき，△ABCの内接円の半径を求めよ。
ただし，内心をＩとする。

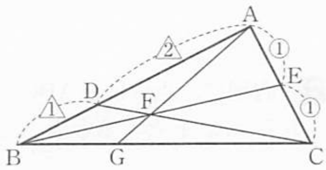


7 右図の△ABCにおいて，辺ABを2：1に内分する点をD，辺ACを1：1に内分する点をE，CDとBEとの交点をF，AFの延長と辺BCとの交点をGとする。

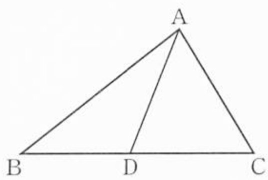
(1) BG：GCを求めよ。

(2) BF：FEを求めよ。

(3) 面積比 △FGC：△ABCを求めよ。



8 △ABCにおいて，AB＞AC ならば，辺BC上の点Dについて AD＜AB であることを示せ。



9 右図において，直線 ℓ に関して同じ側に点A，Bがあり，直線 ℓ 上に点Pがある。$AQ=5$，$BR=3$，$QR=6$ のとき，AP＋PB の最小値を求めよ。